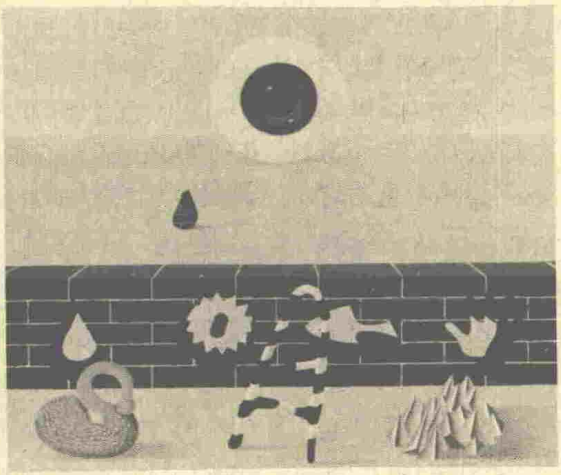
เรื่องน่าอ่าน
เมธี เผ่าบุญมี

เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ กราฟิก : เรขาคณิตเศษส่วน



เรียนรู้เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์กราฟิก เรขาคณิตแบบเศษส่วน ศาสตร์ที่เข้าถึงธรรมชาติอย่างลึกซึ้ง

ในตอนที่แล้วผมได้กล่าวแนะนำถึงขอบเขตและเนื้อหาของสาขาวิชาคอมพิวเตอร์กราฟิกไปพอสังเขป ผมได้กล่าวว่าจุดมุ่งหมายหนึ่งที่นักวิจัยกำลังค้นคว้ากันอย่างหนักก็คือ ทำอย่างไรที่จะสร้างภาพโดยคอมพิวเตอร์ให้เหมือนจริงได้ ซึ่งมีการคิดค้นวิธีการต่าง ๆ มากมาย แต่ถึงกระนั้นภาพที่ได้ออกมาก็ยังไม่วายโดนคนทั่วไปจับได้ว่าไม่ใช่ภาพที่ได้จากของจริงอยู่ดี เพราะจะมีลักษณะแข็งไม่เป็นธรรมชาติอยู่ หรือเป็นภาพที่มองดูก็จะรู้ว่าเป็นภาพที่ตั้งใจทำขึ้น เช่น ถ้าวัตถุในภาพมีเพียงแค่แก้วใสหรือวัตถุกลม ก็เดาได้ว่าน่าจะเป็นภาพที่สร้างจากเทคนิคการตามรอยเส้นรังสีของแสง (Ray Tracing) ถ้าเป็นภาพของห้องในบ้านที่ประกอบด้วยโต๊ะเก้าอี้ และมีจุดเด่นคือมีโคมไฟกับการเล่นแสงและเงาของโคมไฟ ก็เดาได้ว่าน่าจะสร้างจากเทคนิค Radiosity จุดสำคัญก็คือภาพที่สร้างจากคอมพิวเตอร์ส่วนใหญ่ จะเป็นภาพของวัตถุหรือสิ่งของที่ผลิตโดยคนทั้งสิ้น น้อยคนที่จะกล้าสร้างภาพของวัตถุที่เป็นธรรมชาติจริง จนกระทั่งเร็ว ๆ นี้เองที่มีการสร้างภาพของธรรมชาติที่ซับซ้อนขึ้น เช่น ภาพต้นไม้ ภาพภูเขาที่เหมือนจริงโดยคอมพิวเตอร์ หลักการง่าย ๆ ในการสร้างภาพเหล่านี้ก็เป็นหลักการเดียวกับที่ใช้ในเรื่องของการตามรอยรังสีของแสง คือจะเลียนแบบสิ่งใดก็ต้องศึกษาให้รู้จริงถึงลักษณะต่าง ๆ ของสิ่งนั้น ถ้าเราจะสร้างภาพของวัตถุธรรมชาติก็ต้องศึกษากันว่าธรรมชาติมีคุณสมบัติอย่างไร

ธรรมชาติกับเรขาคณิตแบบเศษส่วน

ธรรมชาติคือที่มาของเรื่องเรขาคณิตแบบเศษส่วน นักคณิตศาสตร์พบว่าธรรมชาติรอบตัวเรานี้เกือบทุกอย่างมีคุณสมบัติแบบเศษส่วน เริ่มตั้งแต่สิ่งที่เราเห็น ๆ กันอยู่ในชีวิตประจำวัน เช่น รูปร่างการก่อตัวของภูเขา การแตกแขนงของกิ่งไม้จากลำต้น รูปร่างของเมฆ ไปจนถึงสิ่งที่เราไม่ค่อยได้สัมผัสกันบ่อย เช่น รูปแบบการตกของฝน การจัดตัวของหมู่เกาะ โครงสร้างของเกล็ดหิมะ การก่อตัวของร่องใต้แม่น้ำ การแตกแขนงของเส้นเลือด และที่ไม่น่าเชื่อก็คือ โครงสร้างของจักรวาลที่เราอาศัยอยู่ก็มีคุณสมบัติแบบนี้อยู่ ว่ากันว่าเรขาคณิตแบบเศษส่วนนี้เป็นศาสตร์ที่เข้าถึงธรรมชาติได้ลึกซึ้งแบบที่ไม่เคยมีศาสตร์ไหนเข้าถึงมาก่อน (No one has gone before) เชียวละครับ และก็ว่ากันอีกว่าศาสตร์แขนงนี้แหละ จะ

เป็นตัวที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงครั้งสำคัญอีกครั้งในวงการวิทยาศาสตร์ทีเดียว ที่ผ่านมาเจ้าเรขาคณิตแบบเศษส่วนก็ได้แผ่ขยายเข้าไปในศาสตร์หลายสาขา มีทั้งฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ การสื่อสาร วงการภาพยนตร์ และอื่น ๆ อีกมากมาย

ธรรมชาติกับการสุ่ม

ผู้อ่านบางคนอาจจะคิดว่า เจ้าเรขาคณิตเศษส่วนนี่จะเก่งสักแค่ไหนเชียว จริง ๆ แล้วรูปร่างหรือคุณสมบัติของวัตถุธรรมชาติน่าจะเกิดขึ้นโดยอาศัยหลักของการสุ่ม (Random) ซึ่งแปลง่ายๆ ว่าเป็นไปอย่างไม่มีหลักเกณฑ์นั่นเอง เรื่องนี้นักวิทยาศาสตร์ก็ทราบกันมานานแล้วว่าไม่ใช่แค่นั้นครับ ธรรมชาติมีลักษณะของการสุ่มก็จริง แต่จะอยู่ในขอบเขตกฎเกณฑ์อันหนึ่ง ผู้อ่านจะลองทดลองดูก็ได้ โดยทดลองเขียนโปรแกรมสร้างฉากรูปร่างของทิวเขา และใช้การสุ่มในการกำหนดความสูงของพื้นผิวที่จุดต่าง ๆ จากผลลัพธ์ของโปรแกรมเราอาจจะได้ภาพที่มียอดเขาที่สูงที่สุดกับหุบเขาที่ต่ำที่สุดอยู่ติดกันเลยก็ได้ ซึ่งธรรมชาติจะไม่สร้างสิ่งแบบนั้นเด็ดขาด หรือผู้อ่านอาจจะเขียนโปรแกรมเพื่อบังคับการสุ่ม ห้ามค่าที่สูงสุดของการสุ่มอยู่ติดกับค่าที่ต่ำสุด ภาพที่ได้ก็จะยังไม่เหมือนธรรมชาติอยู่ดี นักวิจัยได้พยายามค้นหาหลักเกณฑ์นี้อยู่นาน จนมาได้คำตอบอยู่ในเรื่องเรขาคณิตแบบเศษส่วนนี่เอง แม้เราจะไม่สามารถทำนายได้ว่ากิ่งไม้จะแตกออกจากลำต้นที่ตำแหน่งใด แต่เราก็รู้ว่ามันไม่ได้จะแตกตามอำเภอใจ ปัจจุบันจากความรู้เรื่องเรขาคณิตเศษส่วนทำให้เราสามารถวัดขอบเขตการสุ่มของวัตถุในธรรมชาติได้เป็นตัวเลขทีเดียว

ประวัติความเป็นมา

สำหรับผู้ที่เคยเรียนเรขาคณิตมาในสมัยเรียนมัธยมก็คงจะจำกันได้ว่าเราได้เรียนเรื่องรูปร่างและคุณสมบัติของเส้นตรง วงกลม วงรี และก็อะไรอีกหลายอย่างที่เราสามารถแทนด้วยสมการอย่างง่าย เรขาคณิตที่เราเรียนกันนี้เรียกกันว่าเป็นเรขาคณิตแบบยูคลิด (Euclidian Geometry) คิดขึ้นเป็นครั้งแรกโดยนายยูคลิด เกิดขึ้นนานมาแล้วตั้งแต่สมัยกรีก นับว่าเป็นความคิดที่ก้าวหน้ามาก นายยูคลิดนอกจากจะพูดถึงรูปร่างของสิ่งต่าง ๆ แล้ว ยังมีการจำกัดความในเรื่องของมิติอีกด้วย โดยแบ่งชนิดของอาณาบริเวณ (Space) ออกเป็น 1, 2 และ 3 มิติตามลำดับ ถ้าในอาณาบริเวณ 1 มิติ ก็จะมีแต่ความยาวอย่างเดียว ไม่มีความกว้างและความสูง สิ่งที่จะอยู่ในบริเวณนี้ได้ก็เช่น เส้นตรง โลกที่เราอาศัยอยู่ในปัจจุบันเรียกว่าเป็น 3 มิติเพราะมีทั้งความยาว ความกว้าง และความสูงครบสามอย่าง ความคิดของนายยูคลิดนี้มีการยอมรับอย่างกว้างขวางอยู่เป็นเวลานาน จนถึงขนาดที่มีการกล่าวกันว่าจักรวาลทั้งจักรวาลที่เราอาศัยอยู่นี้สามารถที่จะเรียนรู้ได้โดยอาศัยเรขาคณิตของนายยูคลิด กับทฤษฎีทางกลศาสตร์ของนายนิวตันเท่านั้น

ในสมัยต่อมานักคณิตศาสตร์สมัยใหม่ที่ได้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับธรรมชาติมากขึ้น ก็เริ่มโต้เถียงความคิดของนายยูคลิดว่าเป็นอุดมคติเกินไป ดือกเตอร์ชาวฝรั่งเศสคนหนึ่งได้กล่าวเป็นเชิงตัดพ้อนายยูคลิดว่า "เมฆไม่ได้เป็นก้อนกลมเสียหน่อย ภูเขาก็ไม่ได้เป็นรูปกรวย ชายฝั่งก็ไม่ได้โค้งเป็นวงกลม เปลือกไม้ก็ไม่เรียบ ฟ้าก็ไม่ได้ผ่าเป็นเส้นตรง" ดือกเตอร์ท่านนี้มีชื่อว่า Dr. Benoit B. Mandelbrot ได้กล่าวคำดังกล่าวไว้ (แต่ไม่ได้เป็นเชิงตัดพ้ออย่างที่ผมเขียนหรอกครับ) ในหนังสือของเขาที่ชื่อว่า The Fractal Geometry of Nature ซึ่งนับได้ว่าเป็นหนังสือเล่มแรกที่กล่าวถึงเรื่องนี้ ดือกเตอร์คนนี้ต้องทำการต่อสู้กับแนวความคิดเก่า ๆ อยู่เป็นเวลานาน กว่าจะได้รับการยอมรับ ปัจจุบันเขาก็ยังค้นคว้าทางด้านนี้อยู่ มีผลงานการสร้างภาพโดยคอมพิวเตอร์แบบแปลก ๆ มาให้เห็นกันบ่อย ๆ ลองดูรูปที่ 1 ซึ่งเป็นภาพจำลองการเกิดไฟป่าเป็นฝีมือของเขาและเพื่อนร่วมงาน ดู

รูปที่ 1
ภาพจำลอง
การเกิดไฟป่า
โดยคอมพิวเตอร์

แล้วนึกไม่ถึงว่าจะเป็นภาพที่สร้างโดยคอมพิวเตอร์

คำว่าเรขาคณิตแบบเศษส่วน (Fractal Geometry) ก็คิดขึ้นโดยดือกเตอร์ท่านนี้เอง ต่อมาเมื่อผลงานของท่านเป็นที่รู้จักมากขึ้น คำว่า Fractal นี้ก็ใช้เรียกอะไรก็ได้ที่มีคุณสมบัติแบบเรขาคณิตแบบเศษส่วน จะขอเรียกคำว่า Fractal เฉย ๆ นี้ว่าเป็นรูปทรงแบบเศษส่วนก็แล้วกันนะครับ

คุณสมบัติของรูปทรงแบบเศษส่วน

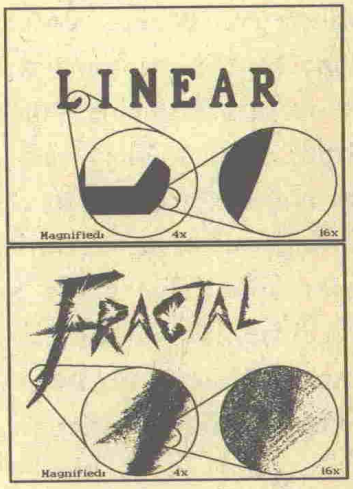
สิ่งใด ๆ ก็ตามจะเรียกว่ามีรูปทรงแบบเศษส่วนได้ต้องที่มีลักษณะ 2 ประการคือ มีโครงสร้างที่ซ้ำ ๆ กันในตัวเองแบบเป็นอนันต์ และมีมิติที่เป็นเศษส่วน

1. มีโครงสร้างที่ซ้ำ ๆ หรือคล้ายคลึงกันในตัวเอง (Self-similarity) แบบเป็นอนันต์

ความหมายของความคล้ายคลึงในตัวเองก็คือ ไม่ว่าเราจะตัดส่วนใดส่วนหนึ่งของวัตถุออกมา ถ้าเราสามารถจะนำส่วนนั้นมาขยายและหมุนไปมาได้ เราจะพบว่ามันจะไปเหมือนกับส่วนอื่นในตัวของวัตถุนั้นเอง

คุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติที่สังเกตเห็นได้ง่ายมากในธรรมชาติ เช่น รูปร่างของสายฟ้า ถ้าเรามองจากระยะไกลก็จะเห็นแค่เส้นที่ยืกยักไปมา แต่ถ้าเรามองภาพถ่ายของการเกิดฟ้าผ่าอย่างใกล้ ๆ จะเห็นว่ามีเส้นยืกยักเล็ก ๆ แตกออกมาจากเส้นยืกยักใหญ่ และถ้าใช้แว่นขยายส่องดูก็จะเห็นเส้นยืกยักย่อยแตกออกมาจากเส้นยืกยักเล็กอีกที หรือจะมองจากต้นไม้ที่มีกิ่งแตกออกมาจากลำต้น ก้านแตกออกมาจากกิ่ง ไล่ได้จนไปถึงเส้นบนใบไม้นั่นทีเดียว สิ่งเหล่านี้แสดงให้เห็นลักษณะการซ้ำ ๆ กันของธรรมชาติได้เป็นอย่างดี

ลักษณะความคล้ายคลึงในตัวเองนี้ทำให้เกิดผลที่ใช้แยกความแตกต่างระหว่างความเป็นอุดมคติของเรขาคณิตแบบยูคลิดกับเรขาคณิตแบบเศษส่วนได้ ถ้าเราต้องการวัดขนาดของวัตถุที่เป็นอุดมคติ เช่น ต้องการวัดเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง เราสามารถวัดค่าได้เป็นตัวเลขที่แน่นอน แต่ถ้าเราต้องการวัดขนาดของวัตถุที่มีรูปทรงแบบเศษส่วน เช่น วัดความยาวของเส้นชายฝั่ง ถ้าเราวัดจากภาพถ่ายดาวเทียม โดยวัดกันเป็นกิโลเมตร เราก็จะได้ค่า ๆ หนึ่ง แต่ถ้าเราต้องการค่าอย่างละเอียดโดยส่งคนไปวัดโดยใช้หลักเมตร เนื่องจากคุณสมบัติการซ้ำกันในตัวเองของธรรมชาติเราจะพบว่า ในอ่าวใหญ่ที่เห็นว่าเป็นอ่าวเดียวในภาพถ่ายทางอากาศก็จะประกอบไปด้วยอ่าวเล็ก ๆ หลาย ๆ อ่าว



รูปที่ 2 ความแตกต่างระหว่างรูปทรงแบบอุดมคติกับรูปทรงแบบเศษส่วน

ดังนั้นความยาวของเส้นชายฝั่งที่วัดครั้งที่สองจะยาวกว่าที่วัดครั้งแรก ถ้าเราใช้หน่วยวัดที่เล็กลงไปอีกเช่นในระดับอะตอม เราก็จะได้ค่าที่ยาวมากขึ้น จะเห็นได้ว่าขนาดของวัตถุที่มีรูปทรงแบบเศษส่วนจะขึ้นกับขนาดของหน่วยวัดที่ใช้ ซึ่งต่างไปจากการวัดขนาดของวัตถุในอุดมคติ

ในตำราบางเล่มก็นิยามคำว่า Fractal ว่า เป็นรูปทรงที่มีรายละเอียดเป็นอนันต์ (Infinitely Detailed Shapes) รูปที่ 2 เป็นการแสดงความแตกต่างระหว่างรูปทรงแบบอุดมคติ ซึ่งเมื่อนำเอาส่วนของรูปทรงที่เป็นอุดมคติมาขยายดูรายละเอียดไปเรื่อย ๆ สุดท้ายก็จะได้เส้นตรง แต่ถ้านำเอารูปทรงที่มีคุณสมบัติแบบเศษส่วนมาขยายก็จะพบแต่รายละเอียดมากขึ้นเรื่อย ๆ

2. มีมิติเป็นเศษส่วน (Fractal Dimension)

คำว่ามิติที่นิยามกันในเรขาคณิตของนายยูคลิดมีความคลุมเคลืออยู่มาก ตัวอย่างง่าย ๆ ก็เช่น เริ่มจากแผ่นกระดาษอันหนึ่ง เป็นที่รู้กันอยู่แล้วว่า

กระดาษเป็นระนาบ (Plane) ซึ่งเป็นตัวอย่างของวัตถุ 2 มิติในอุดมคติ ถ้าเราพับกระดาษให้งอเล็กน้อย กระดาษก็จะเริ่มเข้าสู่ความเป็น 3 มิติ แต่พื้นผิวของกระดาษก็ยังเป็น 2 มิติอยู่ดี ความคลุมเคลือจะเกิดขึ้นถ้าเราถามว่าตอนนี้มิติของกระดาษเป็นเท่าไหร่ 2 หรือ 3 แล้วถ้าเราขยำกระดาษจนเป็นก้อนกลม ตราวนี้เราจะได้ทรงกลมซึ่งเป็นวัตถุ 3 มิติในอุดมคติ จะเห็นว่าถ้าเราเทียบกับแนวคิดที่เป็นอุดมคติแล้ว เราไม่แน่ใจว่าในช่วงระหว่างแผ่นกระดาษกับก้อนกระดาษนั้นมีมิติเป็นเท่าไหร่ แนวความคิดของเรขาคณิตแบบเศษส่วนก็คือ กระดาษเริ่มจากเป็น 2 มิติ ในขณะที่เราค่อย ๆ ขยำกระดาษจนเป็นก้อนกลมนั้น มิติของกระดาษจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เช่น เป็น 2.2, 2.5 จนเป็น 3 เมื่อกระดาษกลายเป็นก้อนกลมพอดี เมื่อรวมเอาคุณสมบัติทั้งสองเข้าด้วยกันแล้ว จะตีความหมายได้ว่า วัตถุที่มีความเป็นเศษส่วนใดมีรายละเอียดมากก็จะมีค่ามิติมาก นักวิทยาศาสตร์ได้ทำการค้นคว้ามาแล้วว่าวัตถุตามธรรมชาติมักมีค่ามิติเป็นเลขที่ลงท้ายด้วย 2 เรียกว่าเป็นกฎ X.2 ดังตัวอย่างข้างล่าง

วัตถุ	มิติ
เส้นชายฝั่ง	1.2
ภูเขา	2.2
เมฆ	3.2-3.3

ในการสร้างภูเขานั้น ถ้าเราสร้างโดยควบคุมการเปลี่ยนแปลงของความสูงให้ได้ค่ามิติเป็น 2.1 เราจะได้ภาพของทิวเขาที่เป็นลูกคลื่น แต่ถ้ายอมให้ค่ามิติเป็น 2.5 หรือมากกว่าก็จะได้ภูเขาที่ขรุขระหน่อย ๆ โดยมียอดสูง ๆ ต่ำ ๆ สลับกันไป จากคุณสมบัติทั้งสองทำให้เราเดาได้ว่า การสร้างรูปทิวเขาด้วยคอมพิวเตอร์นั้นไม่สามารถใช้ค่าที่ได้จากการสุ่ม (Random) เป็นตัวกำหนดค่าความสูงของทิวเขาในแต่ละจุดได้ เพราะเราจะไม่สามารถควบคุมค่ามิติได้

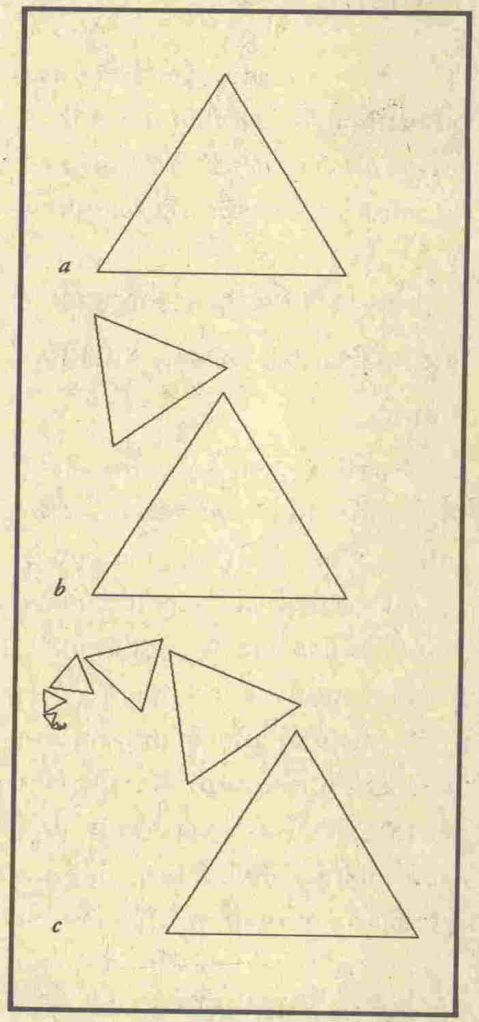
ชนิดของรูปทรงแบบเศษส่วน

เราสามารถแบ่งแยกรูปทรงแบบเศษส่วนไม่ว่าจะเกิดจากธรรมชาติหรือเกิดโดยมนุษย์ก็ตาม โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ แบบที่มีรูปทรงแน่นอน และแบบที่มีรูปทรงไม่แน่นอน

1. มีรูปแบบแน่นอน (Deterministic)

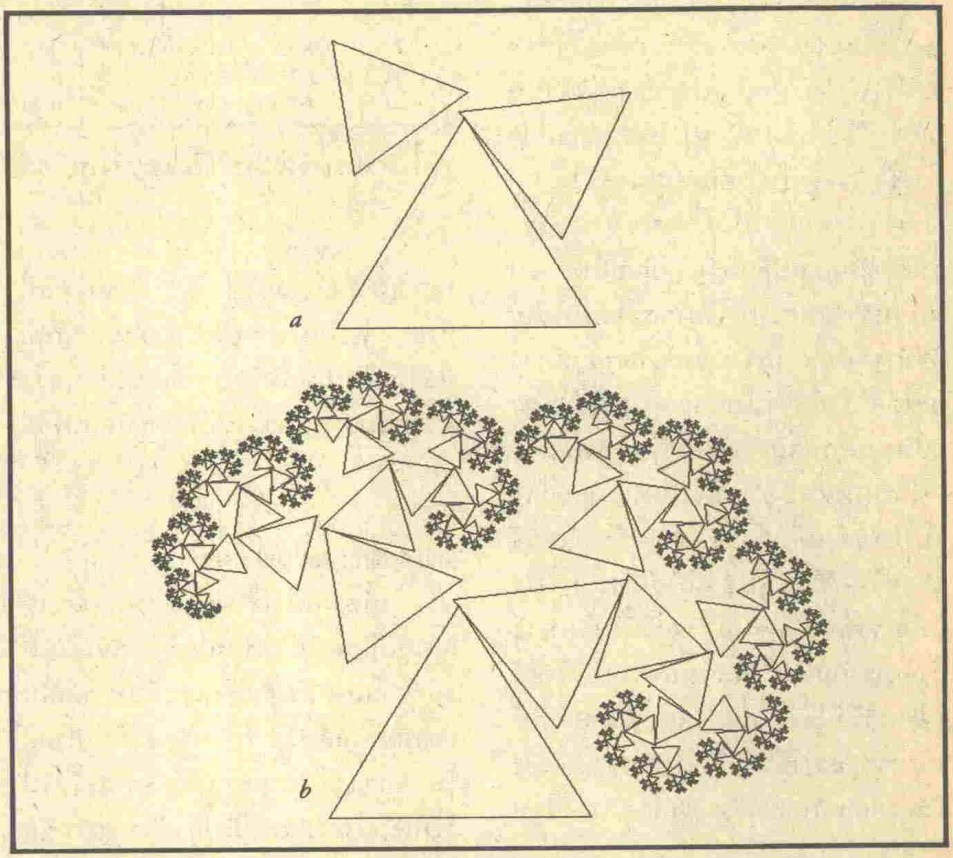
รูปทรงแบบนี้ลักษณะการซ้ำของรายละเอียดในรูปทรงจะแน่นอน เราสามารถตัดเอาส่วนย่อย ๆ ออกมาแล้วทำการหมุน ย่อหรือขยาย เราจะได้ผลลัพธ์ที่ไปเหมือนกับส่วนอื่นของรูปทรงโดยไม่ผิดเพี้ยน รูปทรงแบบนี้มักจะไม่ค่อยพบในวัตถุธรรมชาติจริง ๆ แต่มักจะสร้างโดยคอมพิวเตอร์ การสร้างภาพแบบนี้ผู้อ่านสามารถทำเองได้ถ้ามีความรู้ในการเขียนโปรแกรมสร้างภาพบนคอมพิวเตอร์ และการทำการปรับเปลี่ยน (Transform) รูปร่างของรูปทรงที่วาดอยู่บนหน้าจอ หลักการง่าย ๆ ก็มีอยู่ว่า จากภาพรูปทรงที่เรามีอยู่ เราจะทำการปรับเปลี่ยนรูปร่างของรูปทรงนั้นไปเล็กน้อยและวาดกลับลงไปบนหน้าจอ จากนั้นก็นำผลลัพธ์ที่ได้กลับมาคำนวณโดยใช้หลักเกณฑ์เดิม

การที่เราใช้หลักเกณฑ์เดิมและนำผลลัพธ์ของการคำนวณครั้งที่แล้วกลับมาใช้ในการคำนวณใหม่ ทำให้เกิดผลของรูปทรงที่คล้ายกันในตัวเองเกิดขึ้น ขนาดของการปรับเปลี่ยนรูปทรงที่ใช้จะเป็นตัวกำหนดค่ามิติ เช่น ถ้าทำการหมุนรูปทรงไปมาก ค่ามิติก็จะสูงขึ้น รูปที่ 3 เป็นตัวอย่างการสร้างรูปทรงแบบเศษส่วนอย่างง่าย โดยเริ่มจากสามเหลี่ยมในรูปที่ 3 a เราใช้การปรับเปลี่ยน 3 แบบด้วยกันคือ การหมุนรูปไปทางขวา เลื่อนรูปขึ้น และลดขนาดลง การปรับเปลี่ยนทั้งสามอย่างนี้สามารถเก็บไว้ได้ในแมตริกซ์อันหนึ่ง



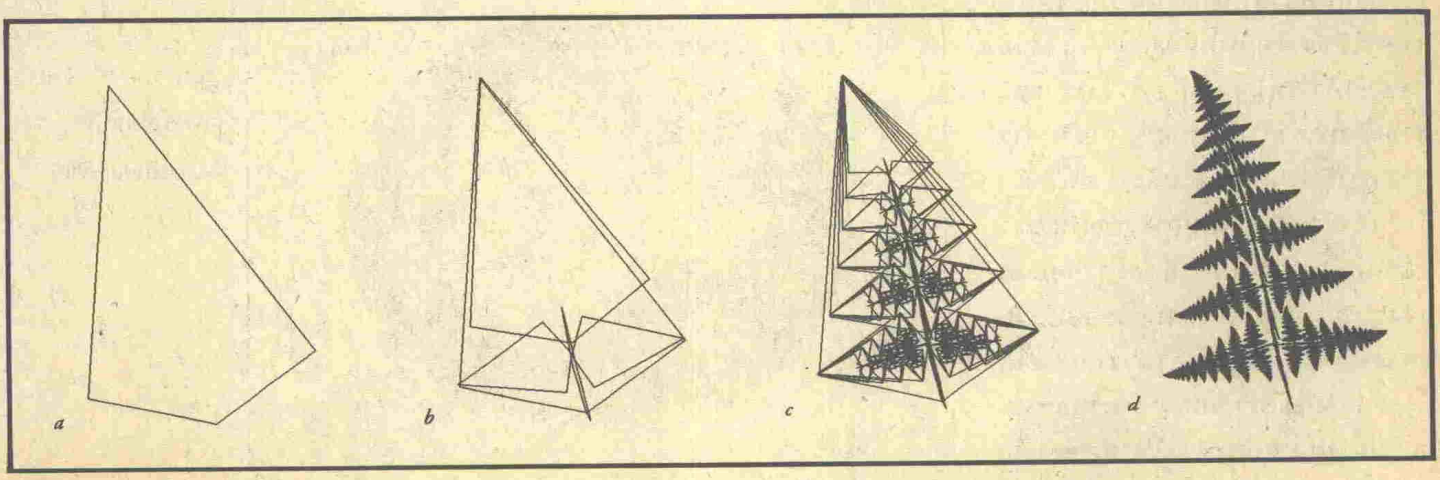
รูปที่ 3 การสร้างภาพรูปทรงแบบเศษส่วนอย่างง่าย

เท่านั้น เมื่อต้องการจะปรับเปลี่ยนรูปร่างใด ๆ ก็นำจุดต่าง ๆ ที่ใช้กำหนดรูปทรงของวัตถุนั้นมาคำนวณเข้ากับแมตริกซ์ในรูปที่ 3 b สามเหลี่ยมเล็กเป็นผลที่ได้จากการนำสามเหลี่ยมในรูปที่ 3 a มาทำการคำนวณ จากนั้นเมื่อเรานำสามเหลี่ยมผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณครั้งที่แล้วกลับมาคำนวณใหม่ก็จะได้ผลลัพธ์ดังในรูปที่ 3 c ถ้าเราต้องการความแปลกเพิ่มขึ้น เราสามารถเพิ่มการปรับเปลี่ยนเป็นสองแบบเข้าไปในภาพดังในรูปที่ 4 a ในการนำสามเหลี่ยมมาคำนวณแต่ละครั้งเราจะได้สามเหลี่ยมใหม่เกิดขึ้นสองรูป เมื่อทำการวนซ้ำไประยะหนึ่งก็จะได้ภาพที่คล้ายจะเป็นต้นไม้ในรูปที่ 4 b



รูปที่ 4 ผลที่ได้จากการเพิ่มวิธีการปรับเปลี่ยนรูปร่างเป็น 2 วิธี

ผมว่านักวิทยาศาสตร์ที่ริเริ่มทำการค้นคว้าในเรื่องนี้คงได้ความคิดมาจากการนั่งเขียนโปรแกรมสร้างรูปบนคอมพิวเตอร์อย่างที่ท่านผู้อ่านบางคนก็ชอบทำอยู่นี่แหละครับ พอได้รูปร่างที่คล้ายต้นไม้แล้วท่านนักวิทยาศาสตร์คงไม่พอใจแค่นั้น คงพยายามจะทำให้เหมือนต้นไม้ให้ได้ โดยทำการแก้ไขโปรแกรมไปเรื่อย ๆ การแก้ไขที่น่าทำที่สุดคือต้องไม่ใช้รูปทรงแบบอุดมคติมาใช้วาด เพราะว่ามันจะไม่เหมือนจริง ซึ่งก็เป็นเรื่องที่แปลกมากตรงที่ เมื่อเราวาดแต่จุดที่แทนรูปทรงแบบอุดมคตินั้นและใช้หลักการสร้างรูปทรงแบบเศษส่วนดังที่กล่าวข้างต้น เราจะได้ภาพที่เหมือนรูปทรงในธรรมชาติจริง ๆ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5 ในรูปนี้เราเริ่มจากรูปทรงแบบอุดมคติในรูป a จากนั้นก็คำนวณ



รูปที่ 5 การสร้างภาพใบไม้

การปรับเปลี่ยนรูปทรงเข้าไปดังในรูป b และ c เมื่อทำการตัดเส้นออกให้เหลือแต่จุดที่มุมของรูปทรงทุกอันก็จะได้ภาพใบเฟิร์น ดังในรูป d น่าแปลกใจไหมครับ ที่รูปเหลี่ยมในรูป a สามารถนำมาใช้สร้างรูปใบไม้ที่เหมือนจริงได้

ความแปลกในเรื่องของการสร้างรูปทรงแบบเศษส่วนไม่ได้มีแค่นี้นะครับ นักวิทยาศาสตร์พบว่าการสร้างภาพโดยวิธีข้างต้นนั้น ไม่ว่าเราจะเริ่มจากรูปทรงอะไร ถ้าเราใช้การคำนวณการปรับเปลี่ยนรูปทรงแบบเดิม เราจะได้ภาพสุดท้ายเหมือนกันเสมอ! ดังนั้นการจะสร้างรูปใบไม้ที่เหมือนจริง เราต้องการแค่วิธีการปรับเปลี่ยนรูปร่างที่ใช้เท่านั้น ซึ่งก็คือเราต้องรู้ตัวแมตริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณนั่นเอง นักวิทยาศาสตร์จึงได้คิดค้นวิธีที่ใช้ในการกำหนดตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณขึ้นเรียกว่า IFS (Iterated Function System) ดังตัวอย่างในรูปที่ 6

หลังจากได้มีการคิดค้นระบบ IFS แล้ว ก็มีการค้นคว้าต่อมาว่าถ้าตัวแปรต่าง ๆ ในตารางเปลี่ยนเป็นเท่านี้ จะได้รูปอะไรออกมา ก็เป็นที่น่าประหลาดใจมากที่เราสามารถสร้างรูปวัตถุธรรมชาติได้หลายอย่าง เช่น รูปต้นไม้ รูปใบไม้อื่น ๆ ได้ด้วยตัวเลขไม่กี่ตัวนี่เอง เมื่อทำการค้นคว้ากันมากขึ้นก็มีนักวิทยาศาสตร์ที่ช่างคิดคนหนึ่งคิดว่า ถ้าเรามีภาพมาภาพหนึ่ง ทำอย่างไรเราจะสามารถหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ในการสร้างรูปนั้นมาเติมลงในตารางได้ ซึ่งเป็นที่มาของการวิจัยที่กำลังเป็นที่กล่าวถึงกันอยู่ในปัจจุบัน ก็คือการย่อภาพ ลองนึกดูว่าภาพใบเฟิร์นที่ประกอบด้วยจุดจำนวนเป็นพันจุดสามารถแทนได้ด้วยตัวเลข 28 ตัว แปลว่าถ้าเราต้องการส่งรูปนี้ไปที่อื่นด้วยสายโทรศัพท์ เราเพียงแค่ส่งตัวเลขไป 28 ตัวข้างต้นนี้ก็พอ ทำให้ประหยัดเวลาและข้อมูลที่ต้องส่งไปเป็นอันมาก อัตราส่วนการย่อข้อมูลขนาดนี้ยังไม่มีใครทำได้มาก่อนเลยครับ

Wi	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

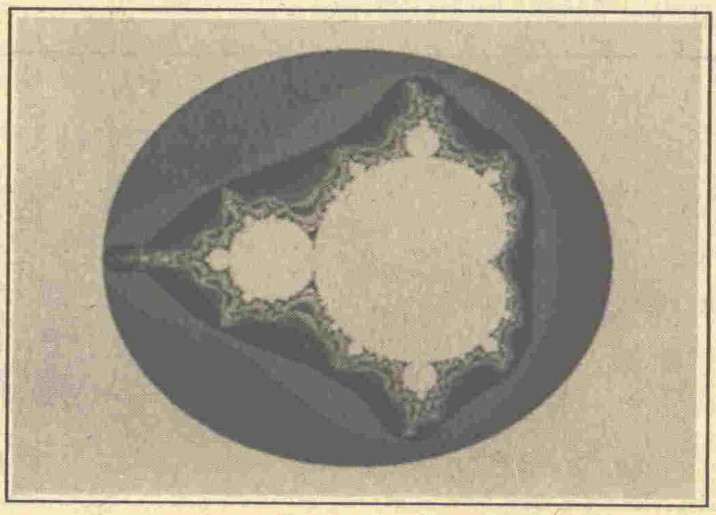
รูปที่ 6 ตารางตัวแปรที่ใช้ในการสร้างรูปใบเฟิร์น

Mandelbrot and Julia set

เมื่อพูดถึงเรื่องของรูปทรงแบบเศษส่วนแบบที่แน่นอนแล้ว ก็จำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงเซตทั้งสองนี้ เพราะเป็นเซตที่มีชื่อเสียงมาก เรียกได้ว่าถ้าอยู่ในวงการรูปทรงแบบเศษส่วนแล้วไม่รู้จักเจ้าเซตทั้งสองก็เรียกได้ว่าเชยแหลกเลยครับ

ได้ยินคำว่าเซตแล้วก็คงเดาได้ว่าเรื่องนี้จะต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แน่ ๆ เจ้าเซตทั้งสองนี้เป็นชุดของตัวเลขเชิงซ้อน (Complex Number) สองชุดที่คิดขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์สองคนที่มีชื่อตามชื่อเซตนั่นเอง สำหรับผู้ที่ไม่รู้จักเลขเชิงซ้อนก็จะขออธิบายว่าเป็นเลขที่ประกอบด้วยตัวเลขย่อย ๆ สองตัว ดังนั้นตัวเลขเชิงซ้อนหนึ่งตัวสามารถนำไปวาดจุดได้หนึ่งจุดบนจอคอมพิวเตอร์ได้พอดี ความมีชื่อเสียงของทั้งสองชุดตัวเลขนี้อยู่ที่ว่า เมื่อนำตัวเลขในเซตไปวาดบนคอมพิวเตอร์แล้วเราจะได้รูปทรงแบบเศษส่วนที่มีความซับซ้อนมากอย่างที่ไม่เคยมีใครสร้างมาก่อน ตัว Mandelbrot Set เองมีผู้ยกย่องว่าเป็นทั้งรูปทรงแบบเศษส่วนที่ยิ่งใหญ่ และเป็นทั้งวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนที่สุดเท่าที่มีการค้นพบมา

การสร้างเซตทั้งสองนี้ใช้หลักการเดิมก็คือ การเอาค่าของตัวเลขที่ได้จากการคำนวณครั้งที่แล้วมาใช้ในการคำนวณครั้งต่อไปโดยใช้การคำนวณแบบเดิม แต่คราวนี้ใช้เลขเชิงซ้อนแทน สมการการ



รูปที่ 7 ภาพที่เกิดจาก Mandelbrot Set

คำนวณเซตทั้งสองก็มีหน้าตาแบบนี้ครับ

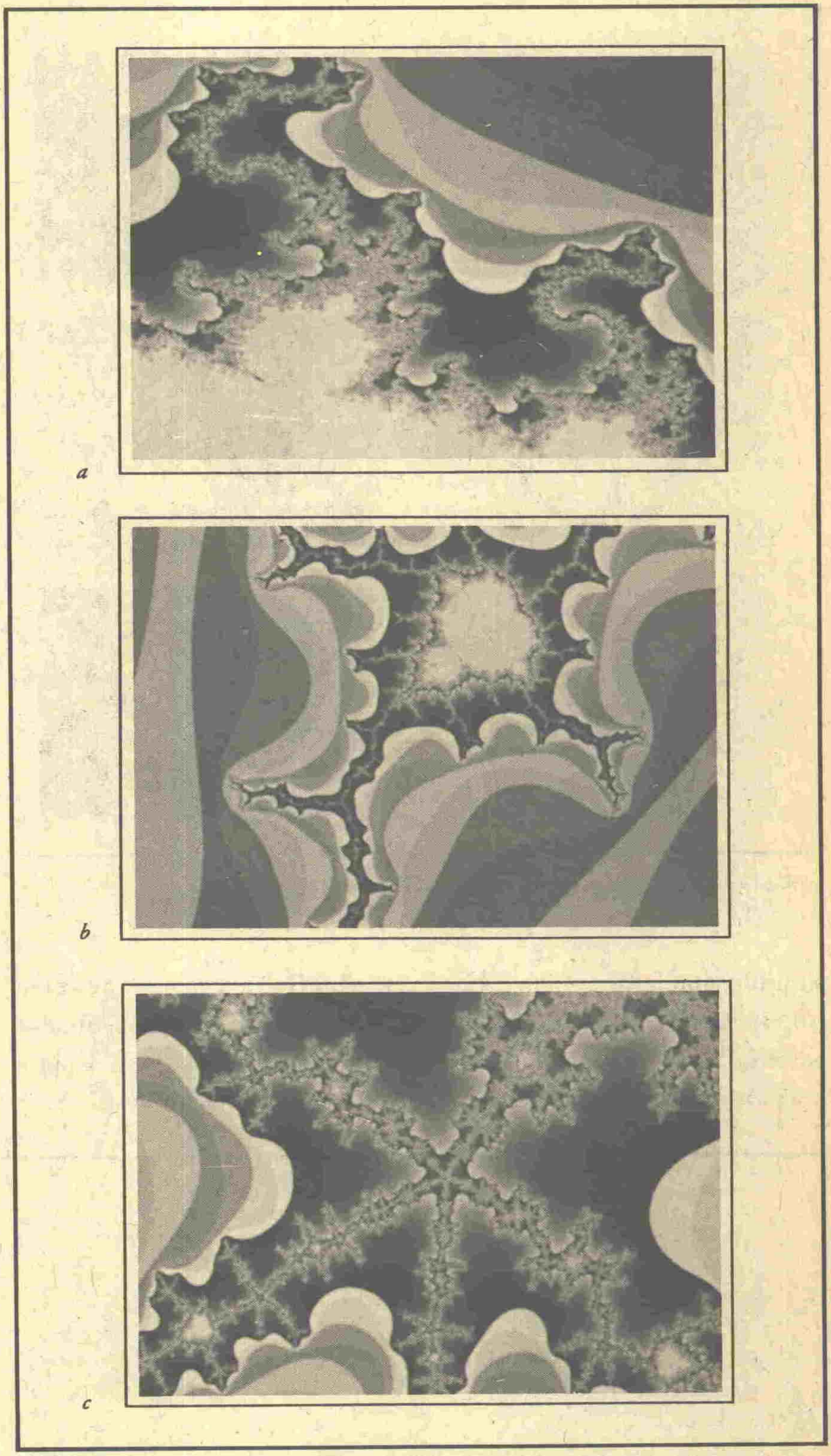
$$z_{i+1} = Z^2 + C$$

โดย Z เป็นเลขเชิงซ้อนที่ว่า และ C เป็นค่าคงที่ เซตหรือชุดของตัวเลขที่ได้จากสมการมีได้หลายชุด ขึ้นกับค่า Z เริ่มต้นและค่าคงที่ C แต่ชุดที่มีชื่อเสียงที่สุดจะเป็นชุดที่นำมาวาดแล้วเป็นดังรูปที่ 7

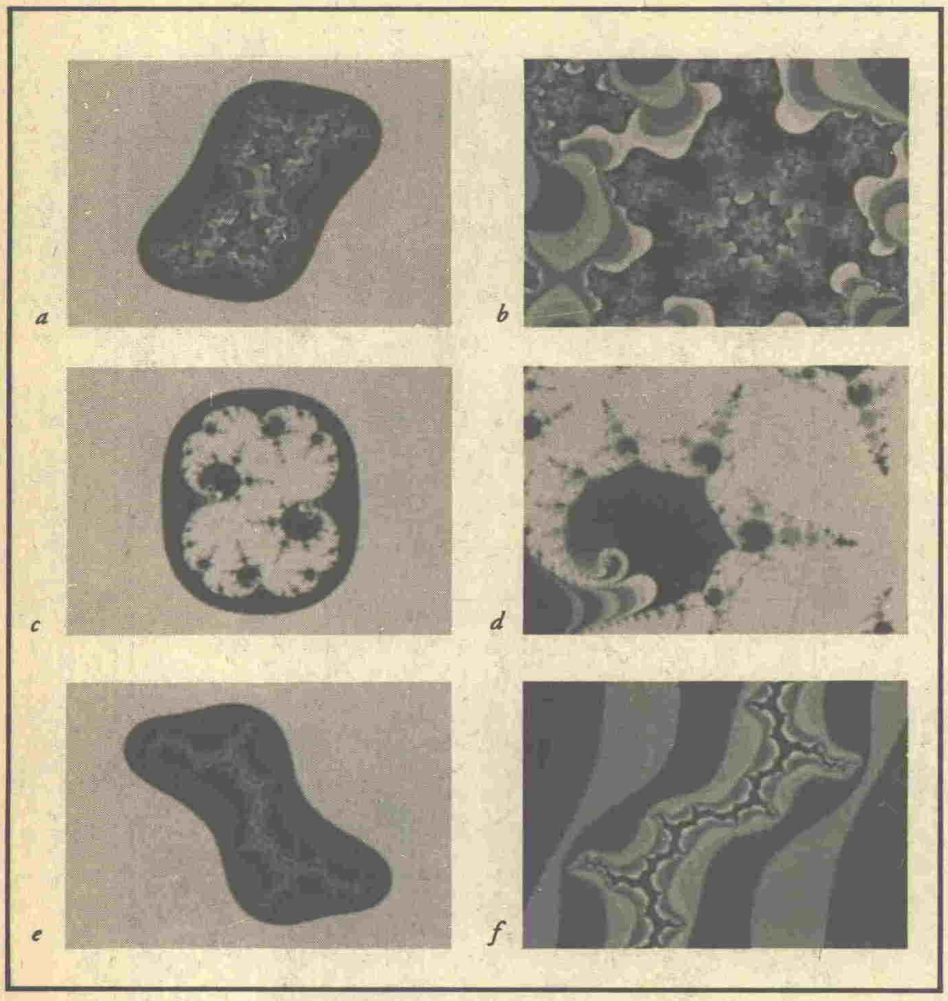
ที่ว่าเจ้าเซตนี้มีความซับซ้อนที่สุดเท่าที่เคยค้นพบมาก็เพราะว่า การคำนวณซ้ำกันนั้นจะทำกี่รอบก็ได้ ยิ่งทำมากเท่าไหร่ก็จะเกิดรายละเอียดในภาพมากขึ้น ว่ากันว่าทุก ๆ วันจะมีผู้ที่ค้นพบรายละเอียดใหม่ที่ไม่เคยมีใครค้นพบมาก่อนจากรูป ๆ นี้ รูปที่ 8 เป็นภาพขยายในส่วนต่าง ๆ ของรูปที่ 7 และที่ไม่น่าเชื่อไปกว่านั้นคือ เมื่อเราขยายจุดจุดเดียวเท่านั้นบนภาพของ Mandelbrot ออกมา เราจะได้ Julia Set ซึ่งมีความซับซ้อนพอ ๆ กับ Mandelbrot Set เลยทีเดียว ผู้อ่านลองนึกดูแล้วกันนะครับว่าเจ้า Mandelbrot Set นี่มีความซับซ้อนขนาดไหน รูปที่ 9 เป็นรูปของ Julia Set ที่ขยายมาจากจุดต่าง ๆ ของ Mandelbrot Set ภาพทางด้านขวาเป็นภาพขยายของภาพด้านซ้ายอีกที เรามักจะเห็นภาพลักษณะแบบนี้ในหนังสือเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์กราฟิกเกือบทุกเล่ม

2. รูปทรงแบบเศษส่วนที่มีรูปแบบที่ไม่แน่นอน (Non-deterministic)

รูปทรงแบบนี้เมื่อตัดส่วนใด ๆ ของรูปออกมาก็จะได้ความคล้ายกับส่วนอื่นเท่านั้น ไม่สามารถทำให้เหมือนกันกับส่วนอื่นในรูปทรงได้เหมือนใน



รูปที่ 8 ภาพขยายที่ส่วนต่าง ๆ ของ Mandelbrot Set



รูปที่ 9 ภาพของ Julia Set ที่ขยายมาจากจุดจุดเดียวของ Mandelbrot Set

แบบที่มีความแน่นอน หลักการสร้างรูปทรงแบบนี้ใช้วิธีเดิมคือ การเอาผลลัพธ์ที่ได้มาทำการคำนวณซ้ำ และก็อาศัยการสุ่มเข้าช่วย ซึ่งการใช้การสุ่มเข้าช่วยไม่ใช่ใช้ในการกำหนดผลลัพธ์โดยตรง แต่เป็นการกำหนดการเปลี่ยนแปลงเทียบกับการคำนวณครั้งก่อน ตัวอย่างเช่น ในการสร้างภาพทิวเขานั้นเราจะไม่ใช้การสุ่มเป็นตัวกำหนดความสูง แต่จะเป็นตัวกำหนดการเปลี่ยนแปลงความสูงเมื่อเทียบกับจุดข้าง ๆ ว่าความสูงที่จุดใหม่ควรจะมากขึ้นหรือน้อยลงกว่าจุดข้าง ๆ เป็นเท่าไหร่

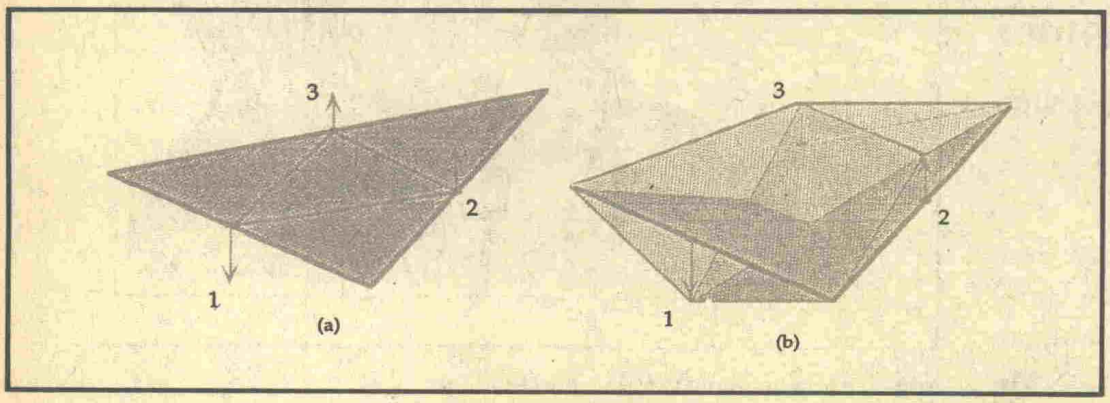
รูปที่ 10 เป็นตัวอย่างการสร้างภาพทิวเขาโดยเริ่มจากรูปสามเหลี่ยมธรรมดาที่ระนาบขนานกับพื้นดิน การคำนวณแต่ละรอบเราจะแบ่งครึ่งเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมที่ได้จากการคำนวณครั้งก่อนและสุ่มความสูงและทิศทางของจุดแบ่งครึ่ง เทียบกับจุดรอบข้างดังรูปที่ 10

เมื่อทำการคำนวณไปหลาย ๆ รอบ เราก็จะได้ความละเอียดมากขึ้น ดังในรูปที่ 11

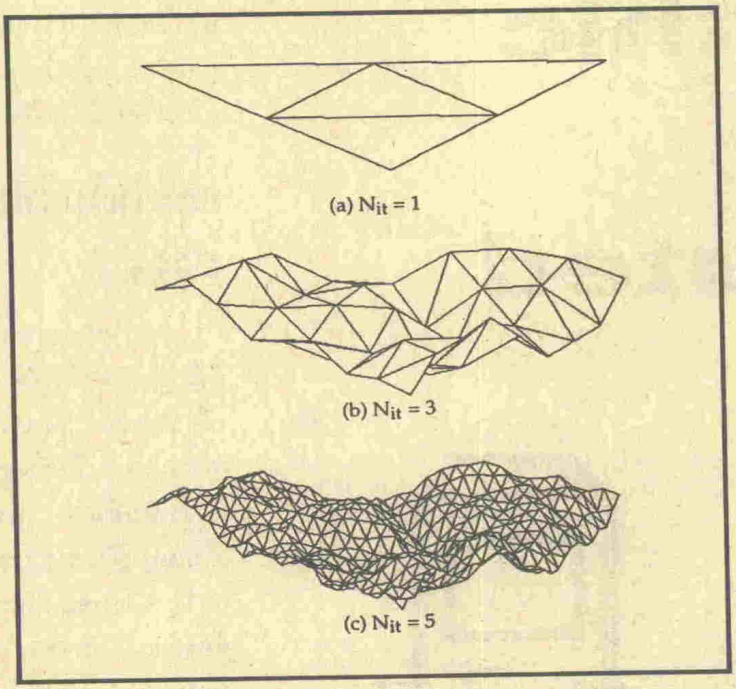
รูปที่ 12 เป็นภาพที่ได้จากการสร้างภาพด้วยวิธีข้างต้น

ส่งท้าย

คอยจับตาดูเทคโนโลยีทางด้านนี้ให้ดีแล้วกันนะครับ เป็นเทคโนโลยีที่ยังใหม่มาก ยังไม่ค่อยได้เอามาใช้งานจริง ๆ เท่าไหร่ แต่แนวโน้มที่จะเอาไปใช้งานได้มีมากมายนับไม่ถ้วน ตัวอย่างที่คิดไม่ถึงก็คือ การเอาไปใช้ในการย่อส่วนรูปภาพบนคอมพิวเตอร์เรียกว่าเป็น Ultra-high-ratio ทีเดียว



รูปที่ 10
การสร้างภาพทิวเขา



รูปที่ 11 เมื่อจำนวนครั้งมากขึ้น ตัวเลขใต้รูปเป็นจำนวนครั้ง

รูปที่ 12 ภาพทิวเขาที่ได้จากคอมพิวเตอร์

โดยมี Professor Michael Barnsley ที่แกพบว่ารูปภาพบนคอมพิวเตอร์สามารถย่อให้เป็นสมการแบบเศษส่วนได้ โดยที่สามารถลดที่เก็บข้อมูลลงได้ในอัตราส่วนถึง 500-1,000 ต่อ 1 และมีการสร้างโมเด็มที่สามารถย่อขยายข้อมูลภาพโดยอัตโนมัติได้แล้ว ทางด้านนักจิตวิทยาก็บอกว่าคนเราที่มักจะทำอะไรซ้ำ ๆ เช่น ทำผิดแบบเดิมบ่อย ๆ อาจจะเป็นไปได้ว่าจิตของเรามีการทำงานเป็นแบบเศษส่วน ด้านฟิสิกส์นี่ก็มี Dr. MandelBrot เจ้าเก่านี่แหละครับที่ไปได้รางวัลเนื่องมาจากการศึกษาว่าทำไมพวกฝุ่นหรือขี้เถ้าที่มีการสะสมเป็นเวลานานจะมีการจับตัวกันเป็นก้อนเล็ก ๆ กระจายอยู่เป็นหย่อม ๆ ผลก็คือว่าการจับตัวนี้มีโครงสร้างแบบเศษส่วนอยู่ แกก็เลยได้รางวัลไป เรียกว่าเป็นการวิจัยฝุ่นอย่างแท้จริง แต่ประโยชน์อาจจะมีมากจนคาดไม่ถึงก็ได้ เพราะการจับตัวของคราบน้ำมันในเครื่องยนต์หรือฝุ่นในปล่องไฟก็เป็นแบบเดียวกัน ในอนาคตอาจมีคนคิดบังคับให้เจ้าฝุ่นเหล่านี้รวมกันเป็นก้อนใหญ่เลย จะได้ไม่ต้องทำความสะอาดกันบ่อย ๆ ก็ได้

เรื่องล่าสุดที่เถียงกันมากที่สุดก็คือจักรวาลของเรานี้มีลักษณะเป็นรูปทรงแบบเศษส่วนก้อนมหึมาหรือเปล่า เพราะการจัดตัวของดวงดาวในจักรวาลก็เป็นรูปทรงแบบเศษส่วน สิ่งต่าง ๆ ในโลกไล่จากสิ่งที่เห็น ๆ กันอยู่ในที่ระดับโมเลกุล จนกระทั่งถึงระดับอะตอมก็มีคุณสมบัติของรูปทรงแบบเศษส่วน ไม่แน่ครับ ความรู้ด้านนี้อาจจะนำไปสู่คำตอบในเรื่องการกำเนิดของจักรวาลก็ได้ ถ้ามีสิ่งใดคืบหน้าผมก็จะนำมาเล่าสู่กันฟังอีกทีครับ

หนังสืออ้างอิง

- Morris W. Friebaugh, "Computer Graphics, Tools for Visualization", WCB
- Foley, van Dam, Feiner, Hughes, "Computer Graphics, Principles and Practice" 2nd edition, Addison Wesley
- Sam Publishing, "on the edge of technology"
- Sam Publishing, "Tricks of The Graphics Gurus"